



**PUC
GOIÁS**

Introdução ao Cálculo

Limites, Derivação e Integração

Raffael Costa de Figueiredo Pinto



Funções

Definição:

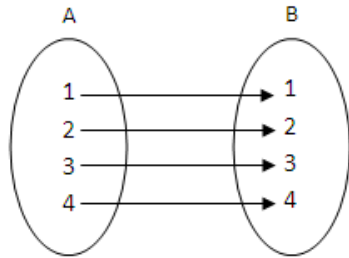
Uma função é uma regra que relaciona cada elemento de um conjunto a um único elemento de outro. O primeiro conjunto é chamado de domínio, e o segundo, contradomínio da função.

A **função** determina uma relação entre os elementos de dois conjuntos. Podemos defini-la utilizando uma lei de formação, em que, para cada valor de x , temos um valor de $f(x)$. Chamamos x de domínio e $f(x)$ ou y de imagem da função.

A formalização matemática para a definição de função é dada por: *Seja X um conjunto com elementos de x e Y um conjunto dos elementos de y , temos que:*

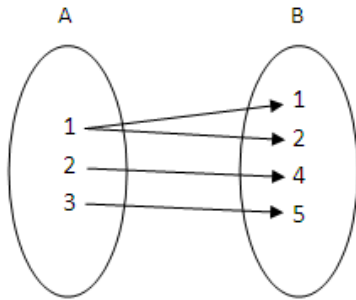
$$f: A \rightarrow B \text{ (função de } A \text{ em } B)$$

- Situação 1:



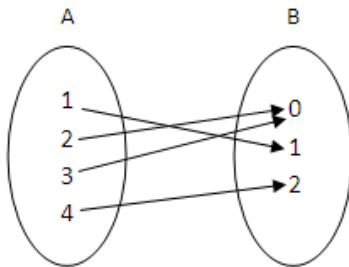
É uma função

- Situação 2:



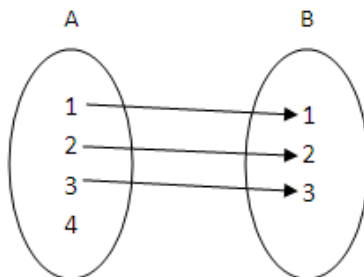
Não é uma função

- Situação 3:



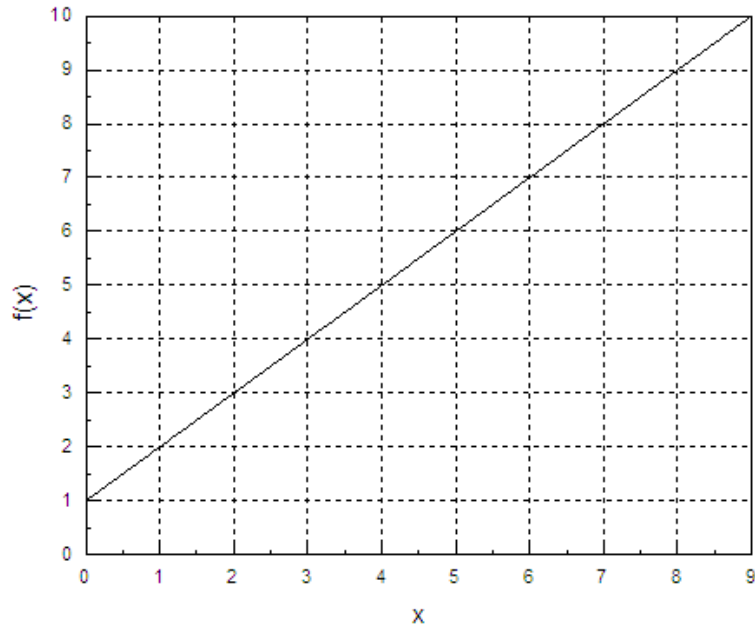
É uma função

- Situação 4:

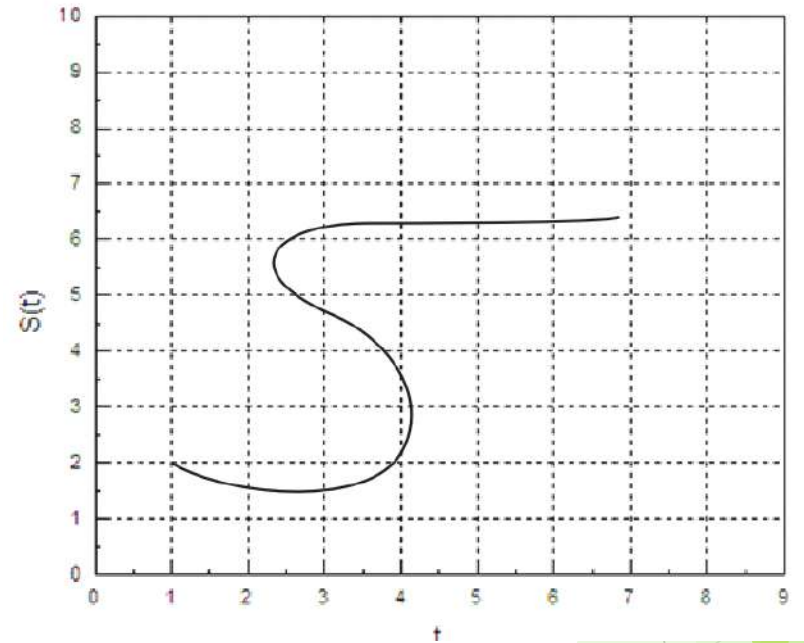


Não é uma função

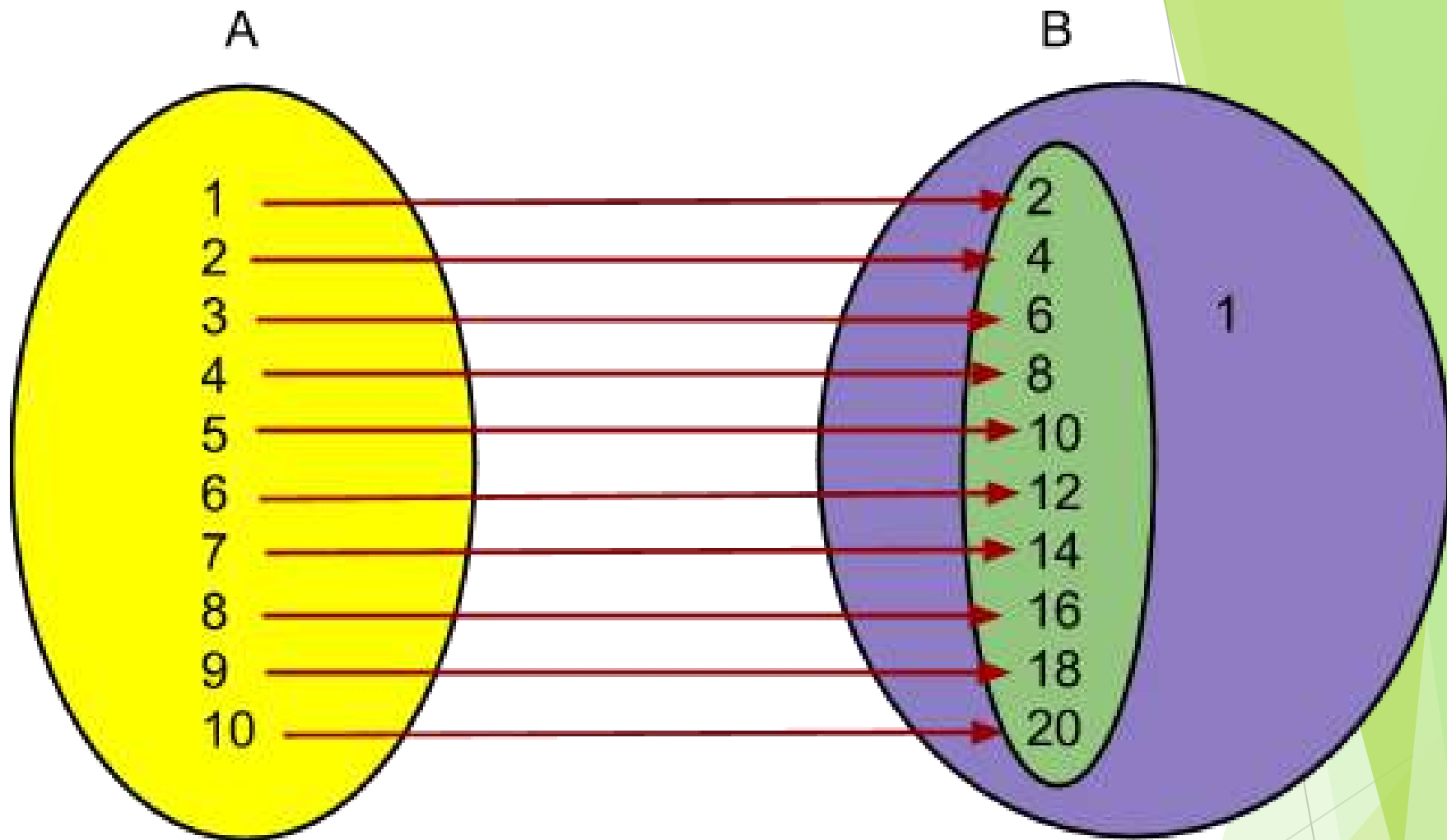
Graficamente, vejamos alguns exemplos:



É uma função



Não é uma função



 Domínio

 Imagem

 Contra-domínio

Função Linear (1º Grau)

$$f(x) = mx + b$$

Equação da função horária da velocidade para um movimento uniformemente variado:

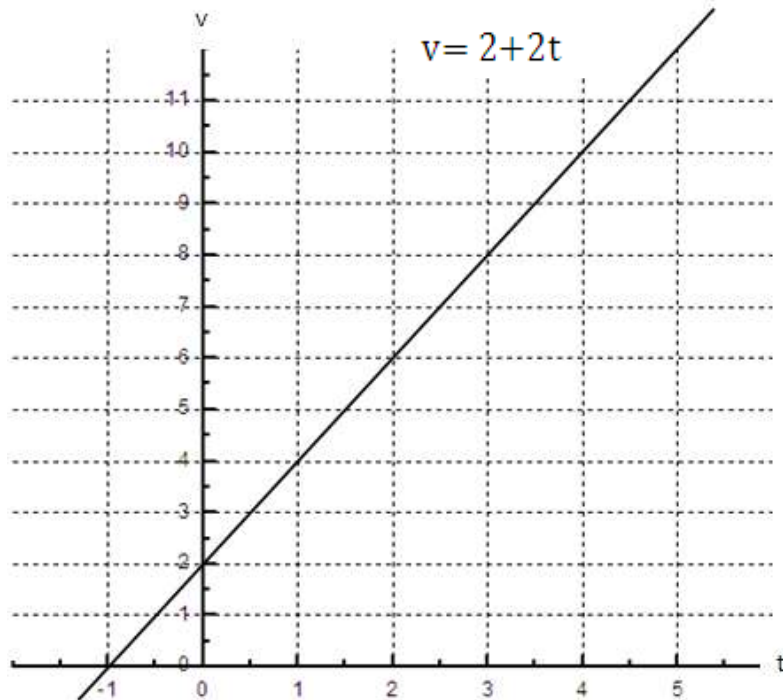
$$v = v_0 + at$$



Função Linear

Exemplo:

- b nesse caso é $v_0 = 2 \text{ m/s}$
- m nesse caso é $a = 2 \text{ m/s}^2$



t	v
-1	0
0	2
1	4
2	6

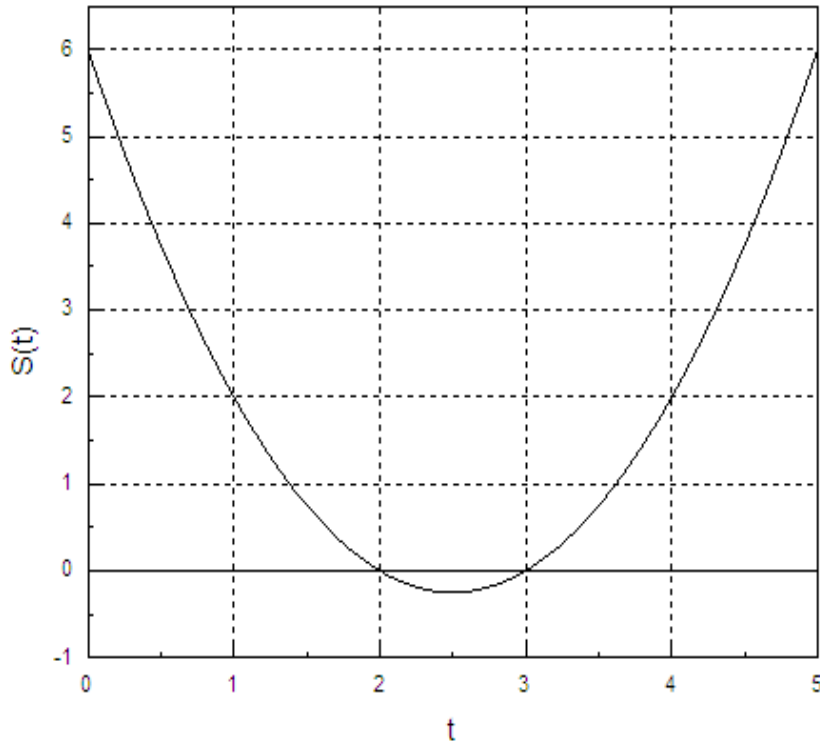
Função Parabólica (2º Grau)

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

A função horária do espaço para o movimento uniformemente variado:

$$S = S_0 + v_0t + \frac{1}{2}t^2 \quad \longrightarrow \quad \text{Função Parabólica}$$

Exemplo:



$$S = 6 - 5t + t^2$$

t	S(t)
0	6
1	2
2	0
3	0
4	2

Limites e Continuidade

Continuidade

O estudo da **Continuidade de uma função** está fortemente vinculado com o estudo de limites, pois quando quer-se saber se uma função é contínua deve-se analisar também a existência do limite.

Grosseiramente, pode-se afirmar que uma função é contínua quando conseguimos desenhar seu gráfico completo sem tirar o lápis do papel, ou seja, de maneira interrupta.

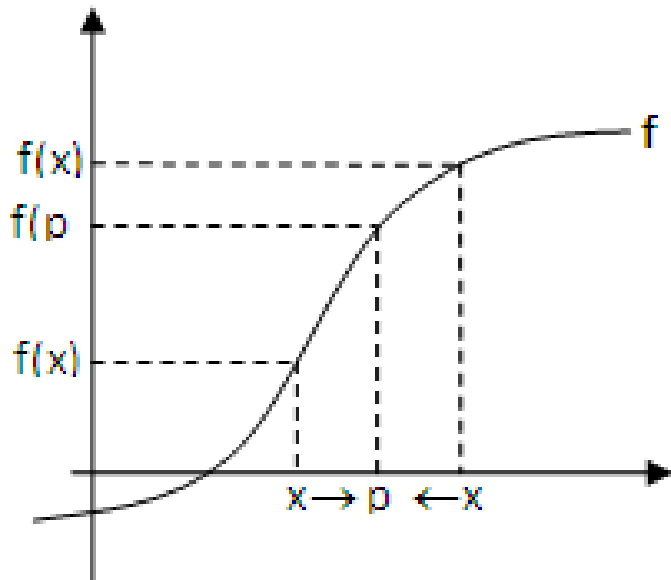
Ou ainda, quando o gráfico da função não possui quebras ou saltos em todo seu domínio.

Definição formal

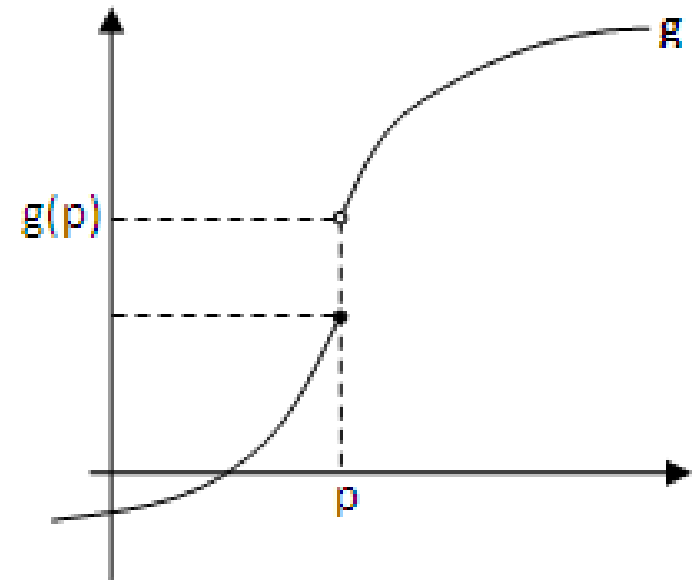
Uma função $f(x)$ é contínua em $x = a$ se as seguintes condições forem satisfeitas:

- a) O valor de $f(a)$ está bem definido;
- b) O limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existir;
- c) O limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$;

Continuidade



Contínua, pois não há salto no gráfico



Descontínua, pois há salto no gráfico

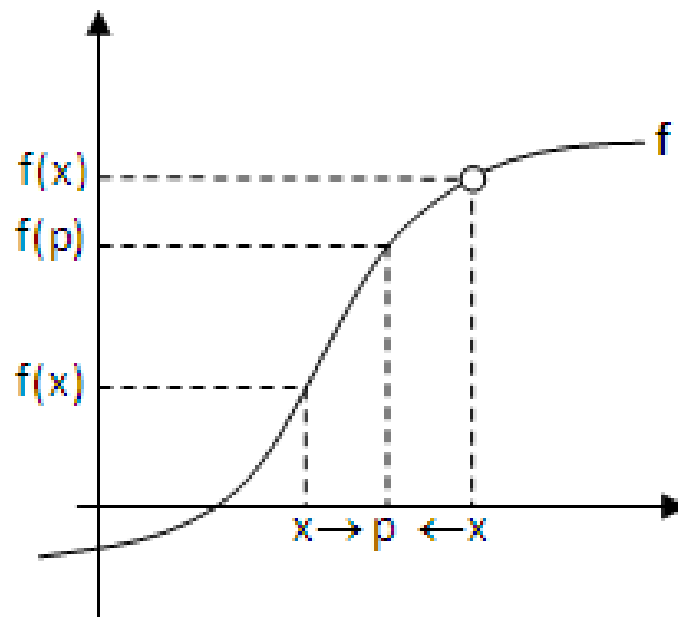
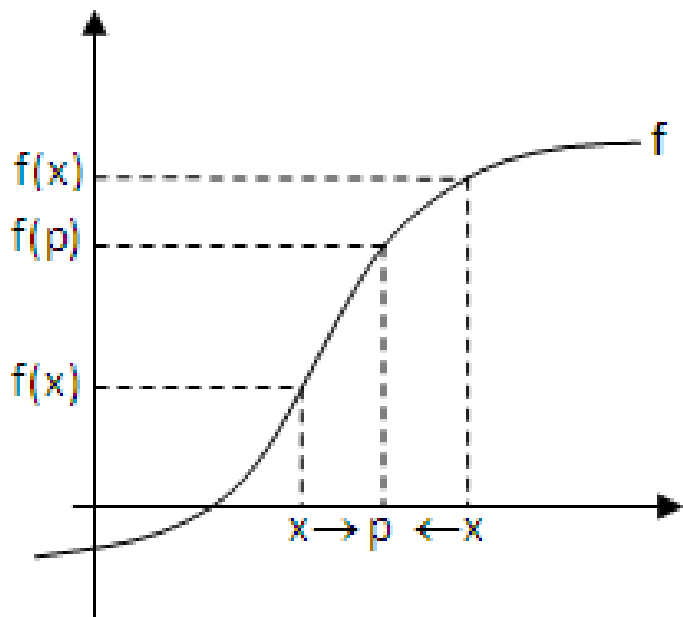
Limite

A **definição** de **limite** é utilizada no intuito de expor o comportamento de uma **função** nos momentos de aproximação de determinados valores. O **limite** de uma **função** possui grande importância no cálculo diferencial e em outros ramos da análise matemática, definindo derivadas e continuidade de **funções**.

Definição:

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$$

Graficamente:





ITS OK

I KNOW MY LIMIT

Encontre o limite da seguinte função:

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 + 2$$

Resolução:

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 + 2 = 3(2)^2 + 2 = 14$$

Encontre o limite da seguinte função:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^4 - 8}$$

Resolução:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^4 - 8} = \sqrt{2^4 - 8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Encontre o limite da seguinte função:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}}$$

Resolução:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}} = \sqrt{\frac{2^3 + 2 \cdot 2 + 3}{2^2 + 5}} = \sqrt{\frac{15}{9}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

Encontre o limite da seguinte função:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$$

Resolução:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{(-3)^2 - 9}{-3 + 3} = \frac{0}{0}$$

Forma indeterminada!

Maneira correta:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$$

Aplicando uma divisão de polinômios temos:

$$\begin{array}{r} \cancel{x^2} - 9 \\ -\cancel{x^2} - 3x \\ \hline -3x - 9 \\ 3x + 9 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \quad x + 3 \\ \hline x - 3 \end{array}$$

Assim o limite se torna:

$$\lim_{x \rightarrow -3} x - 3 = -3 - 3 = -6$$

**POR QUE NA PROVA DE CÁLCULO NÃO CAIU
UMA QUESTÃO SOBRE A ZUEIRA?**

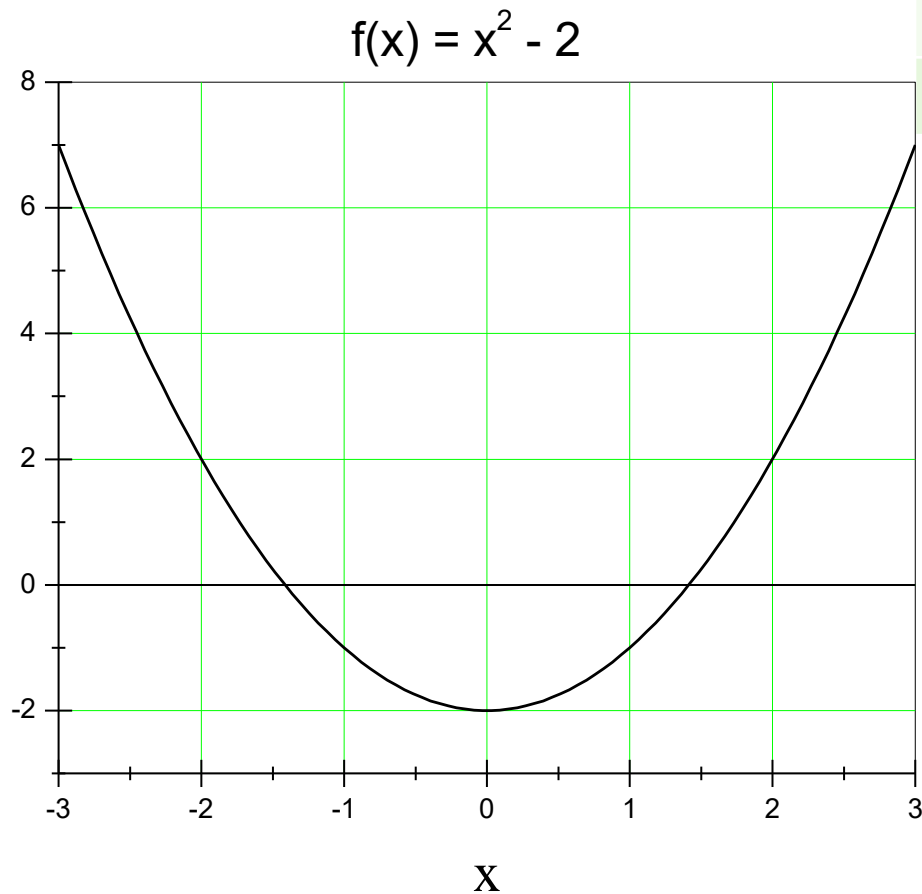
**PORQUE A ZUEIRA NÃO TEM
LIMITES...**

[WWW.4MAT.COM](http://www.4mat.com)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 2$$

Lê-se: limite de x tendendo a 2 pela direita

x	$f(x) = x^2 - 2$	y
2,1	$2,1^2 - 2$	2,41
2,01	$2,01^2 - 2$	2,0401
2,001	$2,001^2 - 2$	2,004001
2,0001	$2,0001^2 - 2$	2,0004001
2,00001	$2,00001^2 - 2$	2,000040001



Propriedades dos Limites

- a) O limite da soma de duas funções é igual a soma dos limites individuais das funções;

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2$$

- a) O limite do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pelo limite da função;

$$\lim_{x \rightarrow a} k f(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$$

- a) O limite do produto de duas funções é igual a produto dos limites individuais das funções;

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \cdot L_2$$

- b) O limite do quociente de duas funções é igual ao quociente dos limites individuais das duas funções.

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad \text{com } L_2 \neq 0$$

Remoção das Indeterminações

Os resultados que representam indeterminações são

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0, \infty - \infty$$

Um fato digno de nota é que a expressão 0^{∞} não constitui uma indeterminação, visto que algo muito pequeno (tendendo a zero) elevado a uma potência maior que 1 se torna um valor menor ainda:

Manipulações matemáticas que nos permitem removê-las:

- Substituição de variáveis
- Fatoração
- Racionalização
- Divisão de Polinômios

Exemplo 1:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Utilizando a fatoração temos:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 2 + 2 = 4$$

Exemplo 2:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

Fazendo uso da substituição de variáveis

$$\text{se } x = t^2 \Rightarrow x \rightarrow 1 \Rightarrow t \rightarrow 1$$

Assim temos:

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t^2} - 1}{t^2 - 1} =$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - 1}{t^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - 1}{(t + 1)(t - 1)} =$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Note que aqui também foi utilizada fatoração

Exemplo 3:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x} - 2}{x - 3}$$

Racionalizando, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x} - 2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x} - 2}{x - 3} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 2}{\sqrt{1+x} + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x}\sqrt{1+x} - 2\sqrt{1+x} + 2\sqrt{1+x} - 4}{(x - 3)(\sqrt{1+x} + 2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 + x - 4}{(x - 3)(\sqrt{1+x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{(x - 3)(\sqrt{1+x} + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 2} = \frac{1}{\sqrt{1+3} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}$$

Exemplo 4

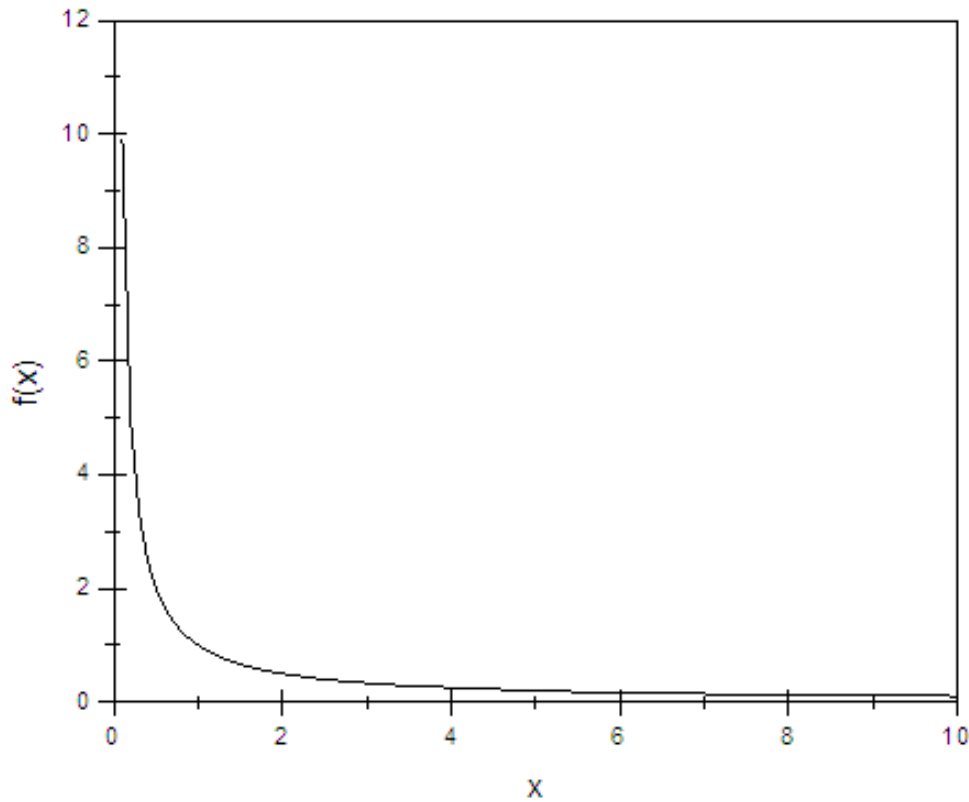
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

Utilizando a Divisão de Polinômio:

$$\begin{array}{r} \cancel{x^2} - 3x + 2 \\ -\cancel{x^2} + x \\ \hline -2x + 2 \\ \cancel{2x} - 2 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x - 1 \\ \hline x - 2 \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x - 2 = 1 - 2 = -1$$

Análise Gráfica



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Se:

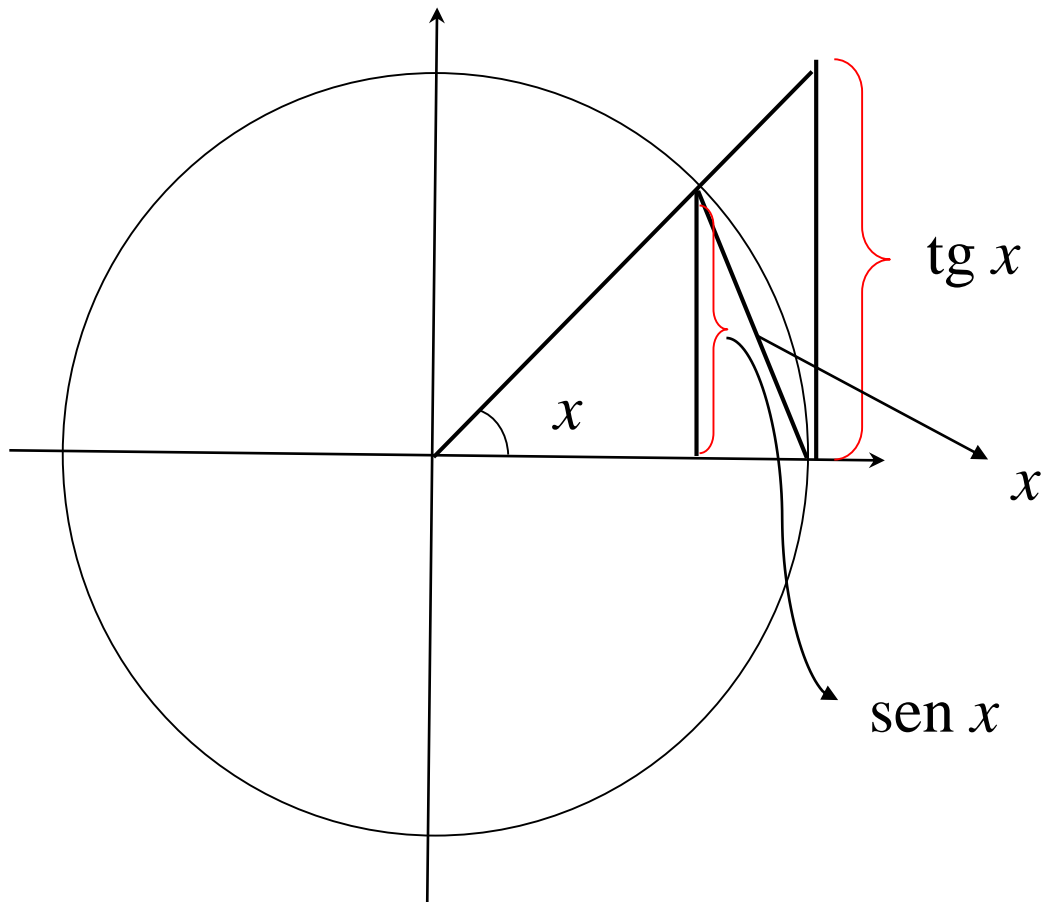
$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{x-8} = \infty$$

Então:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5} = 5$$



Limite de funções trigonométricas



Observando a figura podemos escrever as seguintes desigualdades:

$$\text{sen } x < x < \text{tg } x$$

Se dividirmos a última desigualdade por $\sin x$, pois $\sin x > 0$ para $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, obtemos

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

Como $\sin x/x$ e $\cos x$ são funções pares, temos que a desigualdade é válida para qualquer valor de x que seja diferente de zero, portanto temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Exemplo 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 2x}{x} = 2$$

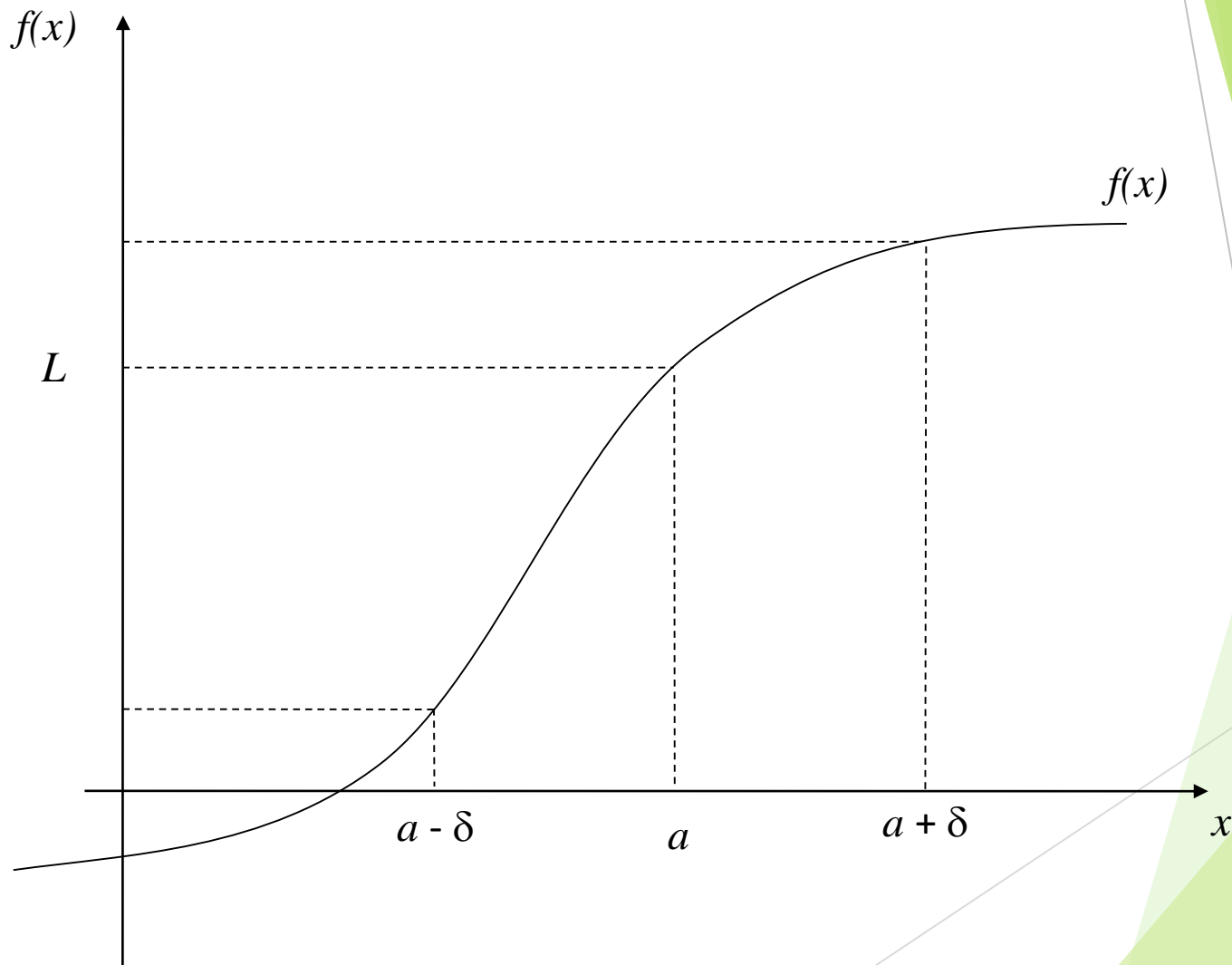
Para resolvermos esse limite, basta colocarmos na forma do limite de $\text{sen } x/x$ com x tendendo a zero. Então, fazendo uma mudança de variável, temos

$$\text{Se } 2x = t \Rightarrow \text{quando } x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0$$

Assim

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 2x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen } t}{t/2} = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen } t}{t} = 2 \cdot 1 = 2$$

Limites Laterais



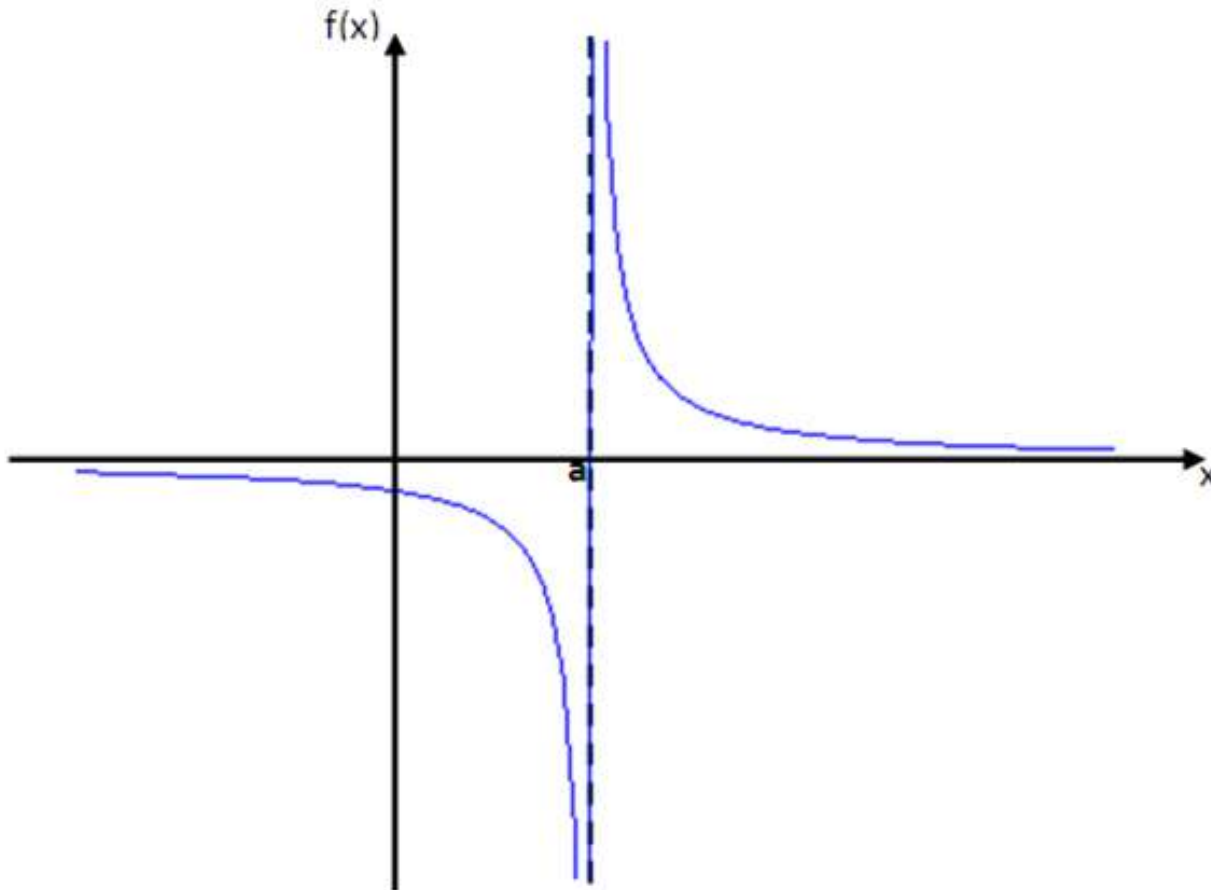
Um limite à direita de uma função é definido quando $a < x < a + \delta$, logo esse é escrito como :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Entretanto quando $a - \delta < x < a$, podemos definir o limite à esquerda de uma função como:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

Considere a função $f(x)$ definida pelo gráfico:



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \frac{1}{x - a} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \frac{1}{x - a} = -\infty$$

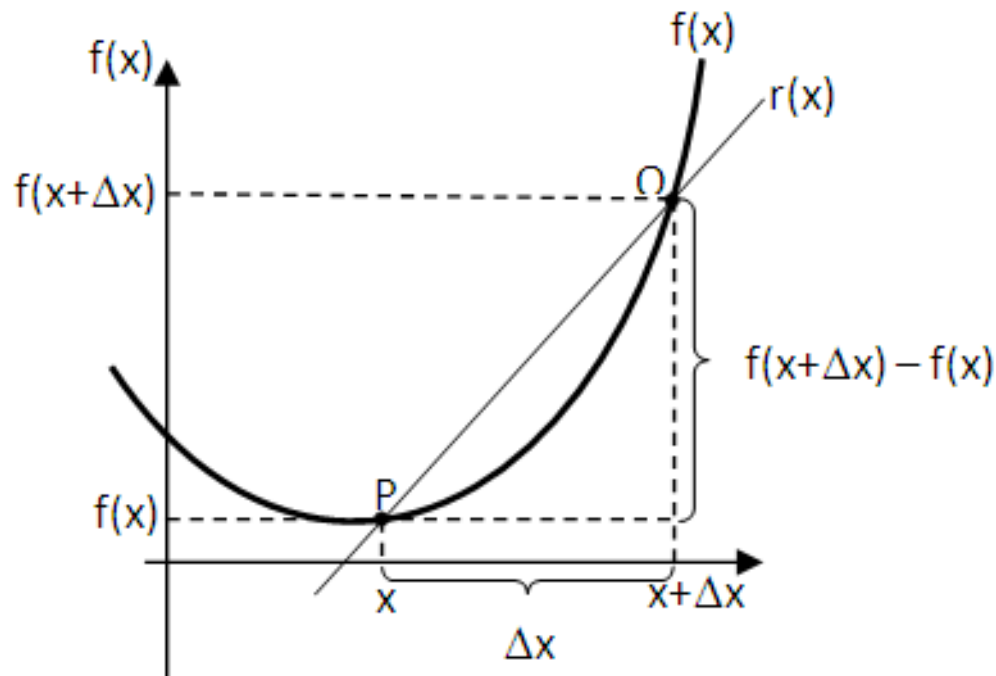
O número de Euler ou número neperiano e

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2,71828$$

x	$(1+x)^{1/x}$	L
1	$(1+1)^1$	2
0,1	$(1+0,1)^{10}$	2,59374246
0,01	$(1+0,01)^{100}$	2,704813829
0,001	$(1+0,001)^{1000}$	2,716923932
0,0001	$(1+0,0001)^{10000}$	2,718145927
0,00001	$(1+0,00001)^{100000}$	2,718268237
0,000001	$(1+0,000001)^{1000000}$	2,718280469
0,0000001	$(1+0,0000001)^{10000000}$	2,718281694
0,00000001	$(1+0,00000001)^{100000000}$	2,718281798
0,000000001	$(1+0,000000001)^{1000000000}$	2,718282052

A Derivada

O conceito de derivada está intimamente relacionado à taxa de variação instantânea de uma função, o qual está presente no cotidiano das pessoas, através, por exemplo, da determinação da taxa de crescimento de uma certa população, da taxa de crescimento econômico do país, da taxa de redução da mortalidade infantil, da taxa de variação de temperaturas, da velocidade de corpos ou objetos em movimento, enfim, poderíamos ilustrar inúmeros exemplos que apresentam uma função variando e que a medida desta variação se faz necessária em um determinado momento



Definição: uma função $f(x)$ é definida em um intervalo aberto contendo um ponto x qualquer, então a derivada de $f(x)$ em x , denotada por dy/dx ou $f'(x)$, é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

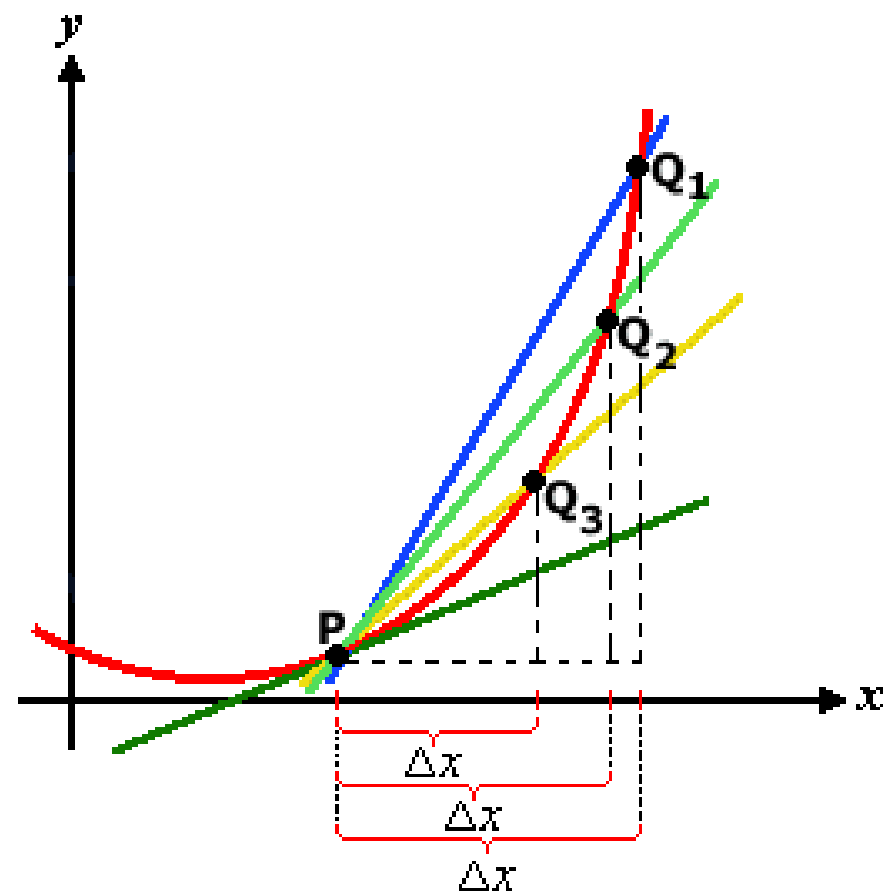
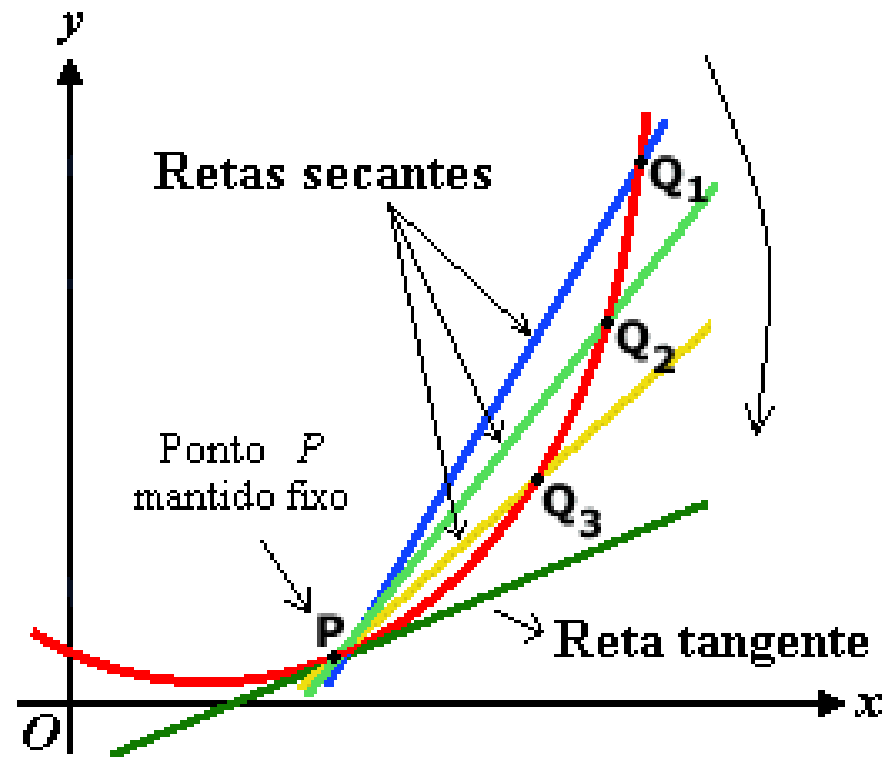
A função derivada representa a taxa de variação do valor de y em relação o valor de x e seu valor numérico é igual a inclinação da reta tangente.

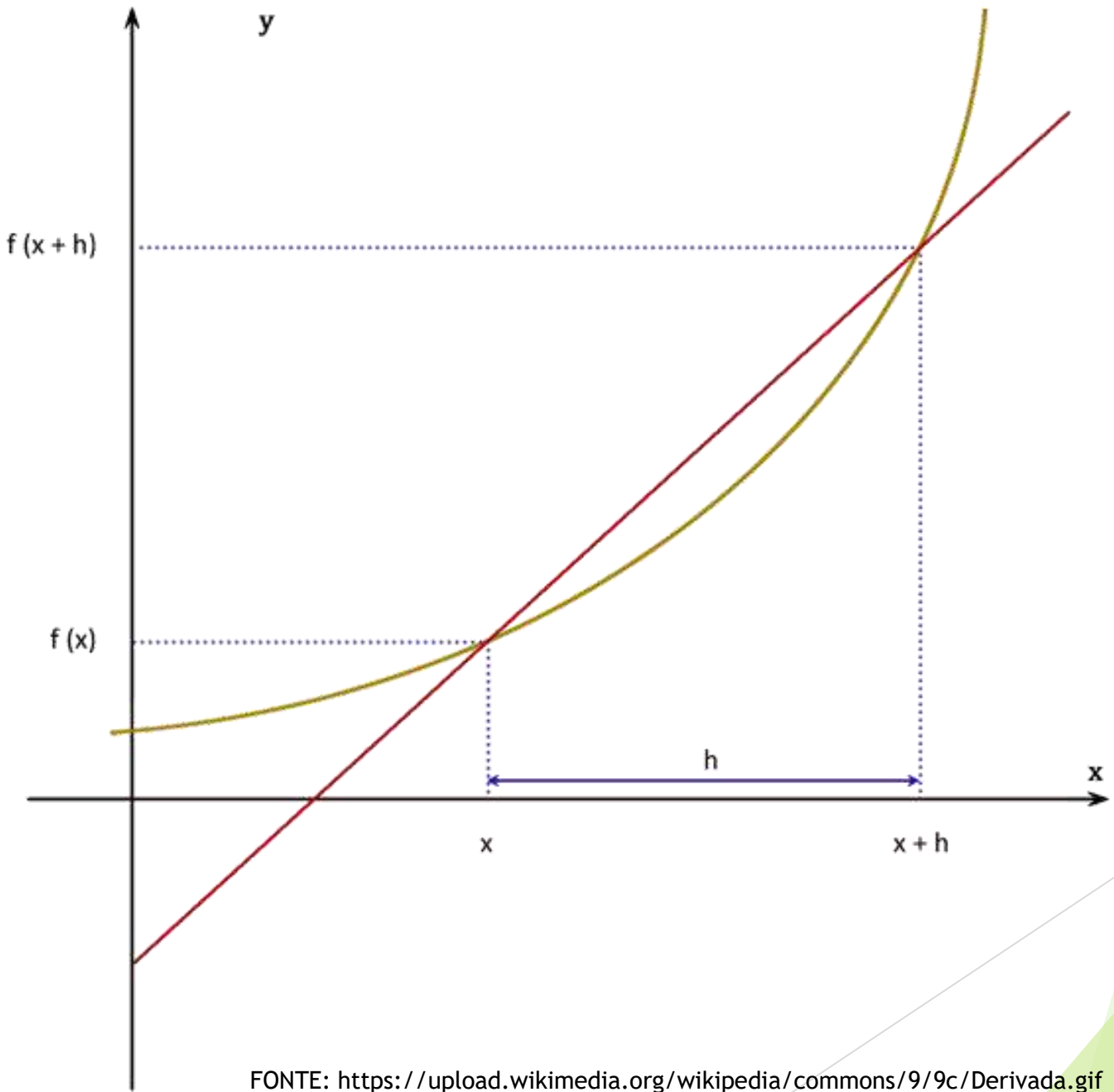
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

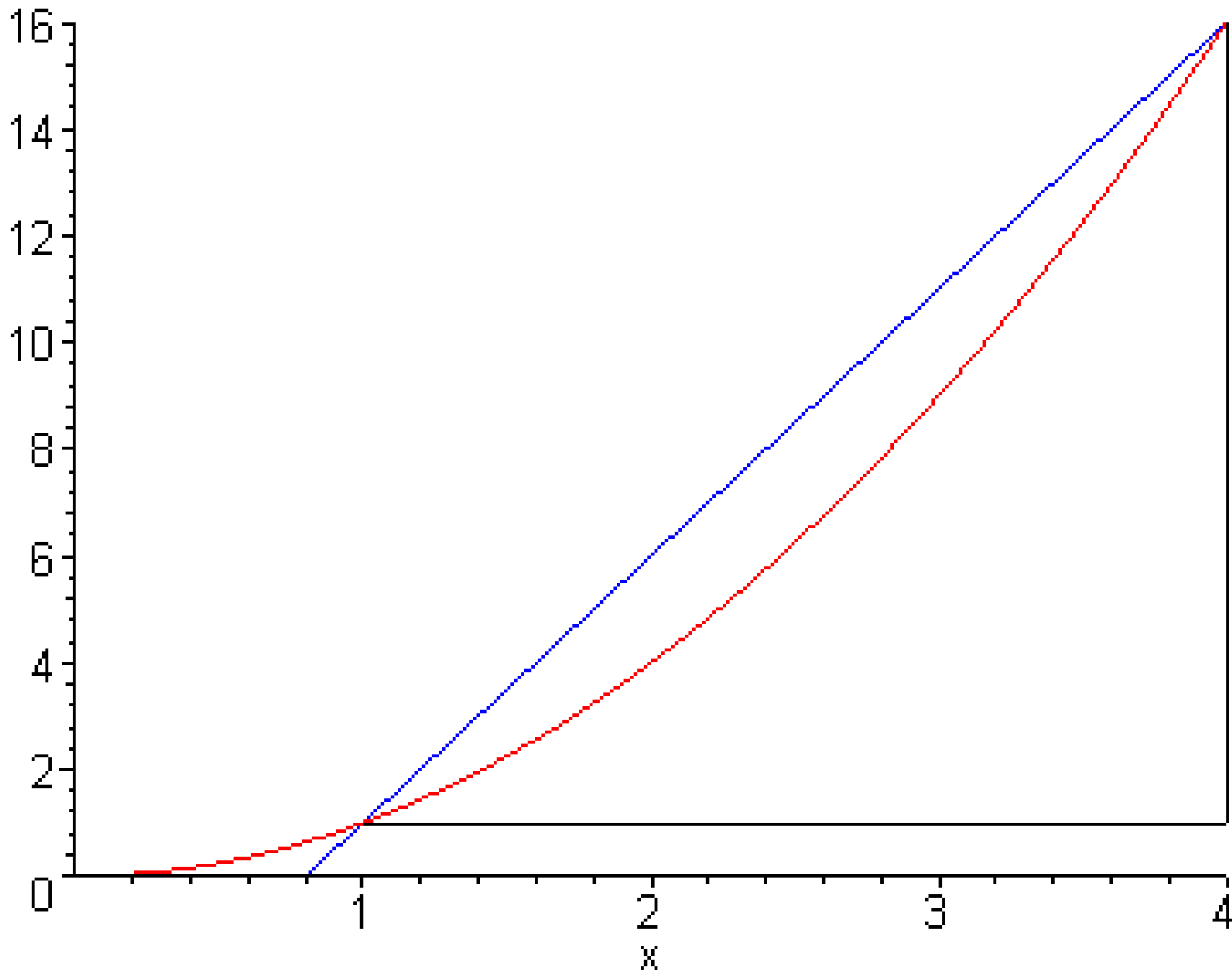
Reta Secante

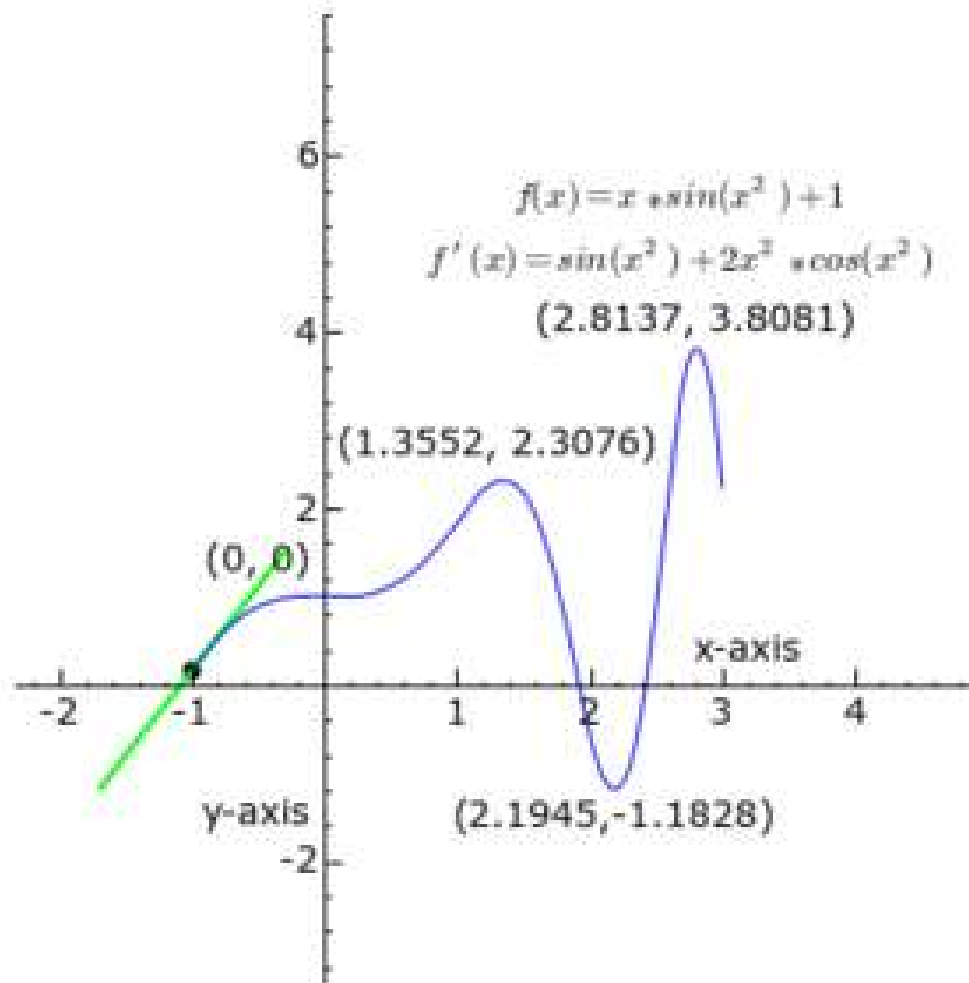
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

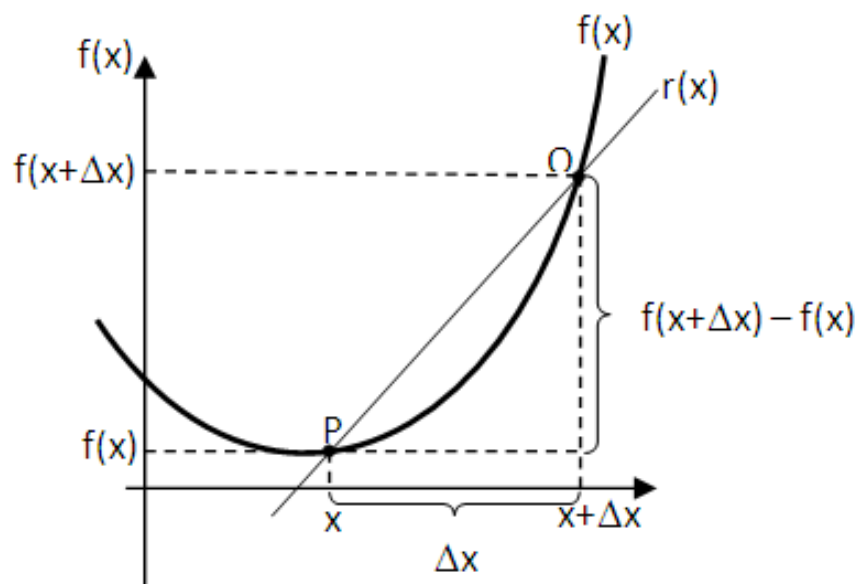
Reta Tangente











Observando o gráfico acima podemos determinar o coeficiente angular da reta $r(x)$:

$$m = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Fazendo $\Delta x \rightarrow 0$ teremos o seguinte:

$$m' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Sabemos que a Equação de uma reta é dada por:

$$y_2 - y_1 = m (x_2 - x_1)$$

Exemplo 1:

Suponha que um objeto em movimento retilíneo, se desloca numa trajetória, de modo que num instante t ele se encontra na posição $s(t) = 2t^2 - 1$, em que “ $s(t)$ ” é o espaço percorrido pelo objeto no instante “ t ”. Determine a taxa média de variação de “ s ” em relação à “ t ”, quando t varia no intervalo $[1-3]$ e a taxa instantânea de variação de “ s ” em relação à “ t ” no instante 1 segundo. Considere o espaço medido em metros e o tempo em segundos.

- Cálculo da taxa média:

Temos que $s(1)$ e $s(3)$ são

$$s(1) = 2(1)^2 - 1 = 1$$

$$s(3) = 2(3)^2 - 1 = 17$$

Desse modo

$$\text{Taxa média} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S - S_0}{t - t_0}$$

$$\text{Taxa média} = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{17 - 1}{3 - 1} = \frac{16}{2} = 8 \text{ m/s}$$

- Cálculo da taxa instantânea

$$\begin{aligned}\text{Taxa instantânea} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[2(t + \Delta t)^2 - 1] - (2t^2 - 1)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2t^2 + 4t\Delta t + 2\Delta t^2 - 1 - 2t^2 + 1}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{4t\Delta t + 2\Delta t^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t(4t + 2\Delta t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 4t + 2\Delta t = 4t = 4 \cdot 1 = 4 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Consideremos a parte do cálculo da Equação acima:

$$\text{Taxa instantânea} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 4t + 2\Delta t$$

Calculemos agora seu resultado para valores de Δx cada vez menores:

$$\text{Taxa instantânea} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 4t + 2(0,5) = 4t + 1$$

$$\text{Taxa instantânea} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 4t + 2(0,05) = 4t + 0,1$$

$$\text{Taxa instantânea} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 4t + 2(0,005) = 4t + 0,01$$

$$\text{Taxa instantânea} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 4t + 2(0,0005) = 4t + 0,001$$

$$\text{Taxa instantânea} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 4t + 2(0,00005) = 4t + 0,0001$$

Notamos que o resultado se aproxima do calculado anteriormente!

Notação para a derivação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Notação de Leibnitz

$$\frac{dy}{dx}$$

Notação de Newton

$$f'(x)$$

Exemplo 2:

Seja a função $f(x) = 5x^2 + 6x - 1$, encontre $f'(2)$

De acordo com a definição, temos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Assim,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[5(x + \Delta x)^2 + 6(x + \Delta x) - 1] - [5x^2 + 6x - 1]}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 6x + 6\Delta x - 1 - 5x^2 - 6x + 1}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 + 6x + 6\Delta x - 1 - 5x^2 - 6x + 1}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{10x\Delta x + 5\Delta x^2 + 6\Delta x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(10x + 5\Delta x + 6)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 10x + 5\Delta x + 6$$

$$f'(x) = 10x + 6$$

$$f'(2) = 10 \cdot 2 + 6$$

$$f'(2) = 26$$

Exemplo 3:

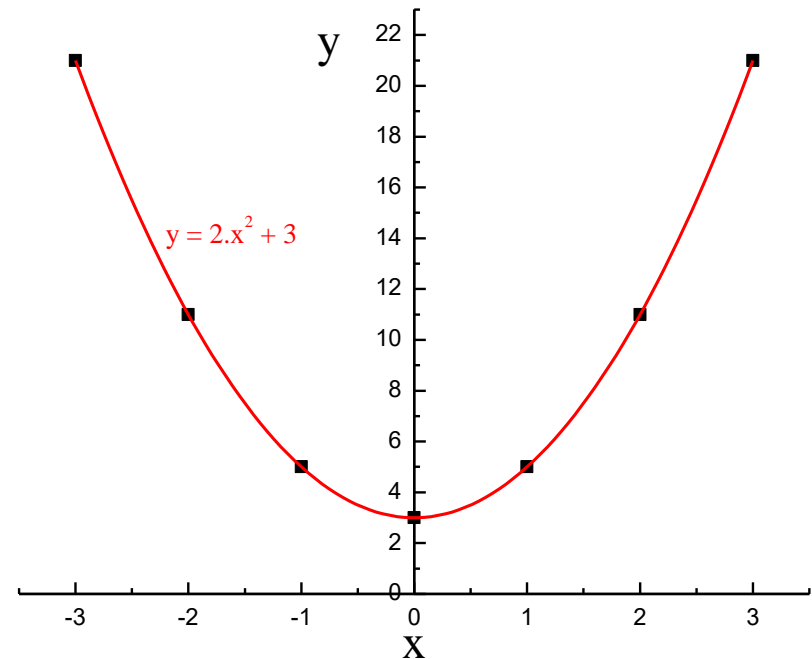
Encontre a equação da reta tangente à curva $f(x) = 2x^2 + 3$ no ponto cuja abscissa é 2

De acordo com a definição, temos

$$m = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Assim, quando a abscissa for 2, $f(x)$ assumirá o seguinte valor

x	$y = 2x^2 + 3$	y
-3	$2 \cdot (-3)^2 + 3$	21
-2	$2 \cdot (-2)^2 + 3$	11
-1	$2 \cdot (-1)^2 + 3$	5
0	$2 \cdot 0^2 + 3$	3
1	$2 \cdot 1^2 + 3$	5
2	$2 \cdot 2^2 + 3$	11
3	$2 \cdot 3^2 + 3$	21



Logo, o ponto em que a reta intercepta a curva é definido pelo par ordenado (2,11). Precisamos obter a inclinação da reta tangente para conhecer a equação da mesma e isso pode ser obtido pela derivada da curva.

$$m' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$m' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[2(x + \Delta x)^2 + 3] - (2x^2 + 3)}{\Delta x}$$

$$m' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[2(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 3] - (2x^2 + 3)}{\Delta x}$$

$$m' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 4x\Delta x + 2\Delta x^2 + 3 - 2x^2 - 3}{\Delta x}$$

$$m' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x\Delta x + 2\Delta x^2}{\Delta x}$$

$$m' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(4x + 2\Delta x)}{\Delta x}$$

$$m' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 4x + 2\Delta x$$

$$m' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 4x + 2\Delta x$$

$$m' = f'(x) = 4x$$

$$m' = f'(2) = 4 \cdot 2 = 8$$

Sabemos que a equação da reta é dada por

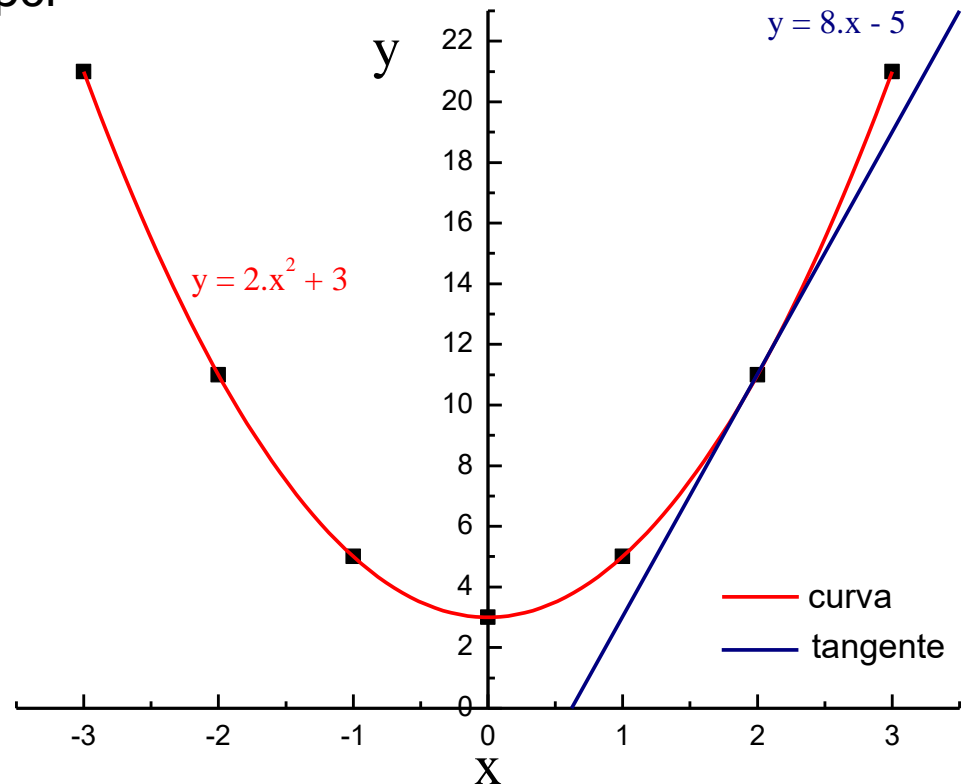
$$y_2 - y_1 = m'(x_2 - x_1)$$

Logo

$$y - 11 = 8(x - 2)$$

$$y = 11 + 8x - 16$$

$$y = 8x - 5$$



Regras de Derivação

Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$, temos:

1) Soma

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

Demonstração:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$[f(x) + g(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} \right]$$

$$[f(x) + g(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right]$$

$$[f(x) + g(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

2) Subtração

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

3) Função constante

Sendo $f(x) = k$, então $f'(x) = 0$, onde $k = \text{constante}$

Demonstração:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \frac{k - k}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x} = \frac{0}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x} = 0$$

$$f'(x) = 0$$

4) Produto de uma constante por uma função

$$[af(x)]' = af'(x)$$

Demonstração:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$[af(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{af(x + \Delta x) - af(x)}{\Delta x}$$

$$[af(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$[af(x)]' = a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$[af(x)]' = af'(x)$$

5) Derivada de uma potência

$$[x^n]' = nx^{n-1}$$

Demonstração:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$[x^n]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

Expandindo a potência binomial com o auxílio do binômio de Newton, temos

$$(x + \Delta x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \Delta x^k$$

Onde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Assim, temos

$$(x + \Delta x)^n = \frac{n!}{0!(n-0)!} x^{n-0} \Delta x^0 + \frac{n!}{1!(n-1)!} x^{n-1} \Delta x^1 + \frac{n!}{2!(n-2)!} x^{n-2} \Delta x^2 + \dots \\ \dots + \frac{n!}{n!(n-n)!} x^{n-n} \Delta x^n$$

$$(x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \Delta x^2 + \dots + x^{n-n} \Delta x^n$$

Substituindo o binômio na definição de derivada, temos

$$[x^n]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[x^n + nx^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \Delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} x^{n-3} \Delta x^3 + \dots + \Delta x^n] - x^n}{\Delta x}$$

$$[x^n]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \Delta x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} x^{n-3} \Delta x^3 + \dots + \Delta x^n}{\Delta x}$$

$$[x^n]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \frac{nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \Delta x + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} x^{n-3} \Delta x^2 + \dots + \Delta x^{n-1}}{\Delta x}$$

$$[x^n]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \Delta x + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} x^{n-3} \Delta x^2 + \dots + \Delta x^{n-1} \right]$$

$$[x^n]' = nx^{n-1}$$

6) Produto de duas funções

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Demonstração:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) + f(x + \Delta x)g(x) - f(x + \Delta x)g(x)}{\Delta x}$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)[g(x + \Delta x) - g(x)] + [f(x + \Delta x) - f(x)]g(x)}{\Delta x}$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ f(x + \Delta x) \frac{[g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x} + \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} g(x) \right\}$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} g(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

7) Quociente de duas funções

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Demonstração:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x) \cdot g(x)}$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x) \cdot g(x)}$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)] \cdot g(x) - f(x) \cdot [g(x + \Delta x) - g(x)]}{g(x + \Delta x) \cdot g(x)}$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{g(x + \Delta x) \cdot g(x)}$$

Utilizando as propriedades de limites, temos

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x) - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x)}$$

Aplicando os limites individualmente, finalmente obtemos

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x) \cdot g(x)}$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

8) Função exponencial com o expoente sendo uma função

$$[a^{g(x)}]' = a^{g(x)} \ln a \cdot g'(x)$$

Demonstração:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$[a^{g(x)}]' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{g(x+\Delta x)} - a^{g(x)}}{\Delta x} = a^{g(x)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{a^{g(x+\Delta x)}}{a^{g(x)}} - 1}{\Delta x}$$

$$[a^{g(x)}]' = a^{g(x)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{g(x+\Delta x)-g(x)} - 1}{\Delta x}$$

Aplicando uma mudança de variável, temos

$$a^{g(x+\Delta x)-g(x)} - 1 = t \quad \Rightarrow \quad a^{g(x+\Delta x)-g(x)} = t + 1$$

$$\ln a^{g(x+\Delta x)-g(x)} = \ln(t + 1) \quad \Rightarrow \quad \ln(t + 1) = [g(x + \Delta x) - g(x)] \ln a$$

Multiplicando por $1/\Delta x$, obtemos

$$\frac{1}{\Delta x} \ln(t + 1) = \frac{1}{\Delta x} [g(x + \Delta x) - g(x)] \ln a$$

Aplicando o limite $\Delta x \rightarrow 0$ na expressão anterior, obtemos

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \ln(t + 1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \ln a$$

Assim,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} = \frac{1}{\ln(t + 1)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \ln a \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} = \frac{1}{\ln(t + 1)} g'(x) \ln a$$

Dessa forma, retornando para a expressão da derivada da função exponencial elevada a uma função, temos

$$[a^{g(x)}]' = a^{g(x)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{g(x+\Delta x)-g(x)} - 1}{\Delta x} = a^{g(x)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} t$$

$$[a^{g(x)}]' = a^{g(x)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{g(x+\Delta x)-g(x)} - 1}{\Delta x} = a^{g(x)} \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x}$$

$$[a^{g(x)}]' = a^{g(x)} \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \frac{1}{\ln(t + 1)} g'(x) \ln a = a^{g(x)} \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln(t + 1)} g'(x) \ln a$$

$$[a^{g(x)}]' = a^{g(x)} \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \ln(t + 1)^{\frac{1}{t}}} g'(x) \ln a = a^{g(x)} \frac{1}{\ln e} g'(x) \ln a$$

$$[a^{g(x)}]' = a^{g(x)} \ln a \cdot g'(x)$$

Função composta e regra da cadeia

Chamamos de função composta de $f(x)$ com $g(x)$ uma função do tipo

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Exemplo:

Dadas as funções $f(x) = e^x$ e $g(x) = x^2 + x$, determine $(f \circ g)(x)$, $(f \circ f)(x)$ e $(g \circ f)(x)$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{x^2+x}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (e^x)^2 + e^x = e^{2x} + e^x$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = e^{e^x}$$

A regra da cadeia afirma que para uma função $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} \quad \text{ou} \quad (f \circ g)'(x) = h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Exemplo:

Seja $f(x) = x^{10}$ e $g(x) = 3x^2 + 2x$, determine $h(x) = (f \circ g)(x)$, e sua derivada

$$h(x) = (3x^2 + 2x)^{10} \Rightarrow \frac{dh}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} \Rightarrow h'(x) = 10(3x^2 + 2x)^9 \cdot (6x + 2)$$

Em resumo:

$$1 \quad [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$2 \quad [f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

3 Sendo $f(x) = k$, então $f'(x) = 0$, onde $k = \text{constante}$

$$4 \quad [af(x)]' = af'(x)$$

$$5 \quad [x^n]' = nx^{n-1}$$

$$6 \quad [f(x) \cdot g(x)]' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

$$7 \quad \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$8 \quad [a^{g(x)}]' = a^{g(x)} \ln a \cdot g'(x)$$

Tabela com as regras de derivação mais utilizadas

$$(1) \quad y = c \Rightarrow y' = 0$$

$$(2) \quad y = x \Rightarrow y' = 1$$

$$(3) \quad y = c \cdot u \Rightarrow y' = c \cdot u'$$

$$(4) \quad y = u + v \Rightarrow y' = u' + v'$$

$$(5) \quad y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$(6) \quad y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(7) \quad y = u^\alpha, (\alpha \neq 0) \Rightarrow y' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$$

$$(8) \quad y = a^u, (a > 0, a \neq 1) \Rightarrow y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$$

$$(9) \quad y = e^u \Rightarrow y' = e^u \cdot u'$$

$$(10) \quad y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u} \log_a e$$

$$(11) \quad y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

$$(12) \quad y = u^v, (u > 0) \Rightarrow y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$$

$$(13) \quad y = \operatorname{sen} u \Rightarrow y' = \cos u \cdot u'$$

$$(14) \quad y = \operatorname{cos} u \Rightarrow y' = -\operatorname{sen} u \cdot u'$$

$$(15) \quad y = \operatorname{tg} u \Rightarrow y' = \operatorname{sec}^2 u \cdot u'$$

Exemplo 1 – Utilizando as regras de derivação, calcule as derivadas das funções a seguir:

a) $f(x) = x^5$

a) $f'(x) = 5x^4$

b) $f(x) = 3x^4 + 8x + 5$

b) $f'(x) = 12x^3 + 8$

c) $f(x) = 4x + 3$

c) $f'(x) = 4$

d) $f(x) = e^{5x^2}$

d) $f'(x) = 10xe^{5x^2}$

e) $f(x) = \log_5 x^2$

e) $f'(x) = \frac{2}{x} \log_5 e$

f) $f(x) = \cos 2x$

f) $f'(x) = -2 \sin 2x$

g) $f(x) = \sqrt{5x^2 + 4x}$

g) $f'(x) = \frac{10x+4}{2\sqrt{5x^2+4x}}$

h) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}}{4x^3+2}$

h)

i) $f(x) = \frac{e^{-x}}{3x^2} + xe^{2x}$

i)

Exemplo 2 – Determine a taxa de variação média e a taxa de variação instantânea da área de quadrado de lado L , quando o lado mede 5 cm e varia em 2 cm.

- A área pode ser descrita pela função

$$A(L) = L^2$$

Assim, a taxa de variação média é:

$$\text{Taxa de variação média} = \frac{\Delta A}{\Delta L} = \frac{(5 + 2)^2 - 5^2}{2} = 12 \text{ cm}$$

A taxa de variação instantânea pode ser obtida pela definição

$$\text{Taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{A(L + \Delta L) - A(L)}{\Delta L}$$

$$\text{Taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{(L + \Delta L)^2 - L^2}{\Delta L}$$

$$\text{Taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{L^2 + 2L\Delta L + \Delta L^2 - L^2}{\Delta L}$$

$$\text{Taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta L(2L + \Delta L)}{\Delta L}$$

$$\text{Taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} (2L + \Delta L)$$

$$\text{Taxa de variação instantânea} = 2L$$

$$\text{Taxa de variação instantânea} = 2 \cdot 5 = 10 \text{ cm}$$

A taxa de variação instantânea pode ser obtida também, de maneira bem simplificada, pela aplicação das regras de derivação

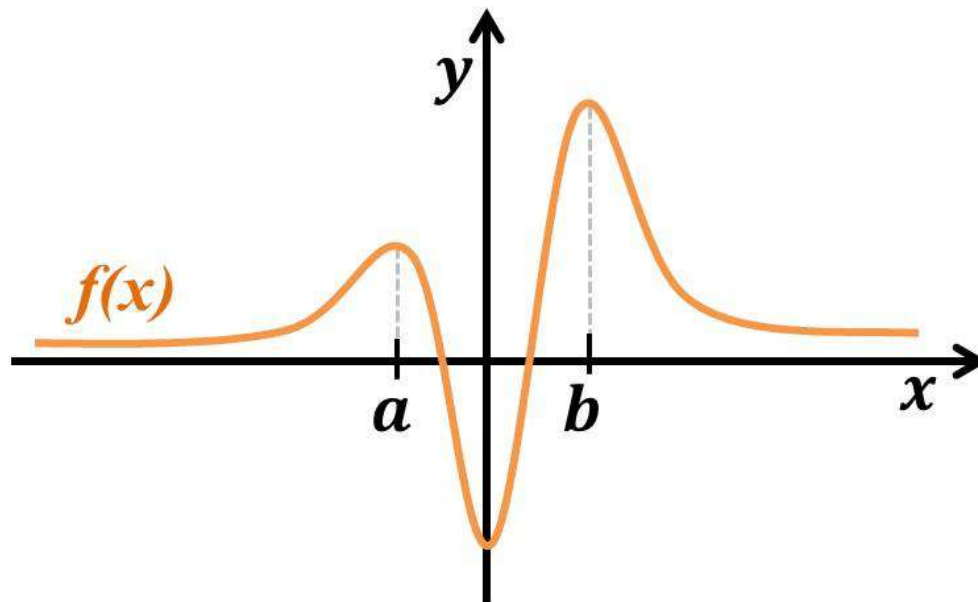
$$\text{Taxa de variação instantânea} = A'(L)$$

$$\text{Taxa de variação instantânea} = 2L$$

$$\text{Taxa de variação instantânea} = 2 \cdot 5 = 10 \text{ cm}$$

Máximos e Mínimos de uma função: teste da primeira derivada

Grosseiramente podemos dizer que os pontos de Máximos e Mínimos de uma função são os pontos de picos e de depressões da função.



Observando o gráfico podemos identificar que os pontos $f(a)$ e $f(b)$ são pontos de máximo local e $f(0)$ é ponto de mínimo local.

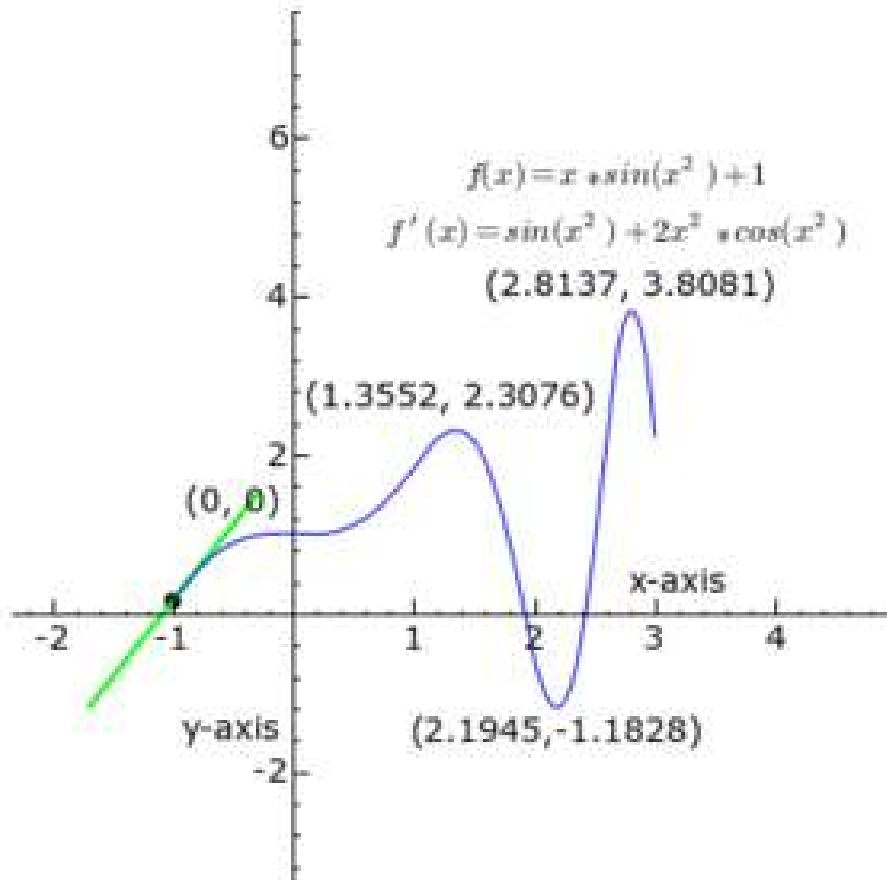
Ainda mais, podemos dizer que o ponto $f(b)$ é um máximo absoluto e $f(0)$ é ponto de mínimo absoluto, pois $f(b)$ é o maior valor de $f(x)$ e $f(0)$ é o menor valor de $f(x)$.

$$f(0) \leq f(x) \leq f(b)$$

Mas como encontrar estes pontos em uma função qualquer que não se conheça o gráfico?

Nos pontos de máximos e de mínimos de uma função com intervalos infinitos a inclinação da reta tangente é zero (reta tangente horizontal) logo a derivada da função nesse ponto também deve ser nula.

Assim, ao derivar a função e igualar a zero, é possível encontrar estes pontos.



$f'(x) > 0$, a inclinação é positiva então a função é crescente.

$f'(x) < 0$, a inclinação é negativa então a função é decrescente.

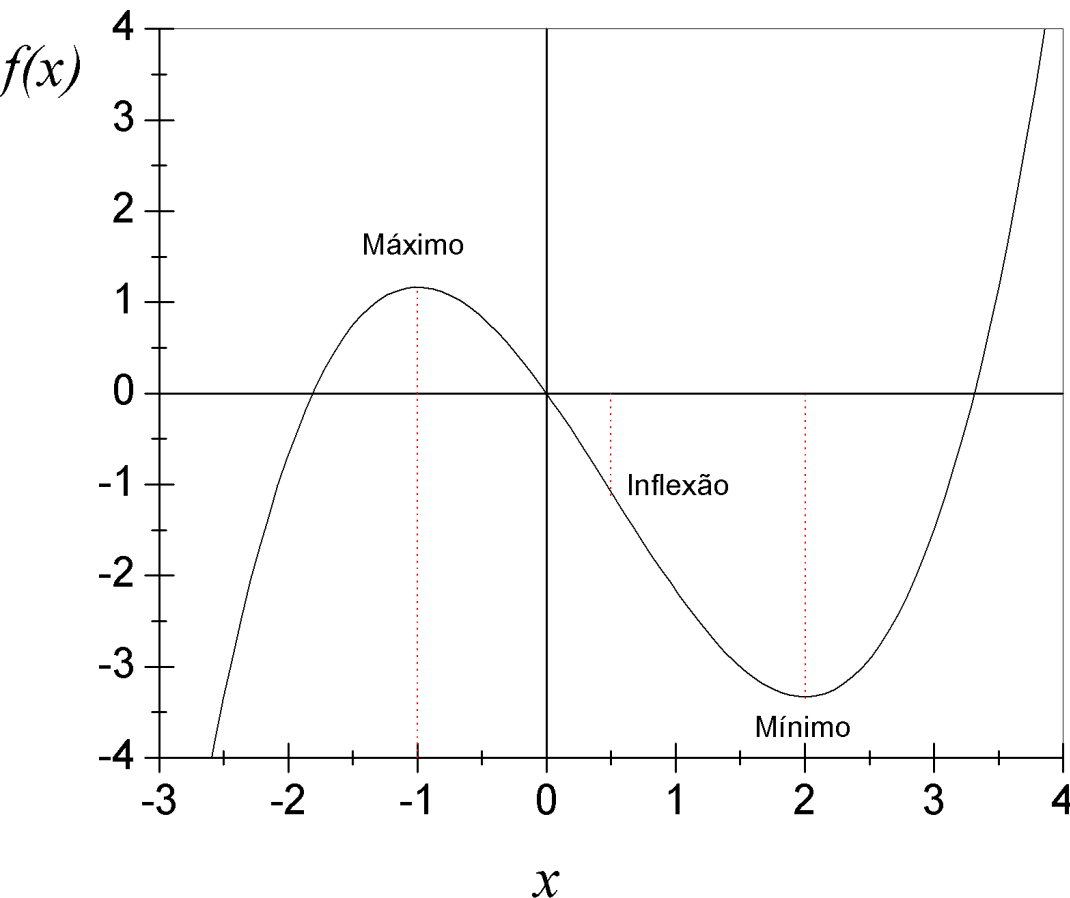
$f'(x) = 0$, a inclinação é nula então a função está nos pontos de inflexão.

Exemplo:

Encontre os pontos de máximo, mínimo e inflexão da função: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$

- Fazendo $f'(x) = 0$, obtemos

$$f'(x) = x^2 - x - 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$



Resolvendo a equação do 2º grau para encontrar suas raízes, temos

$$x_1 = -1$$

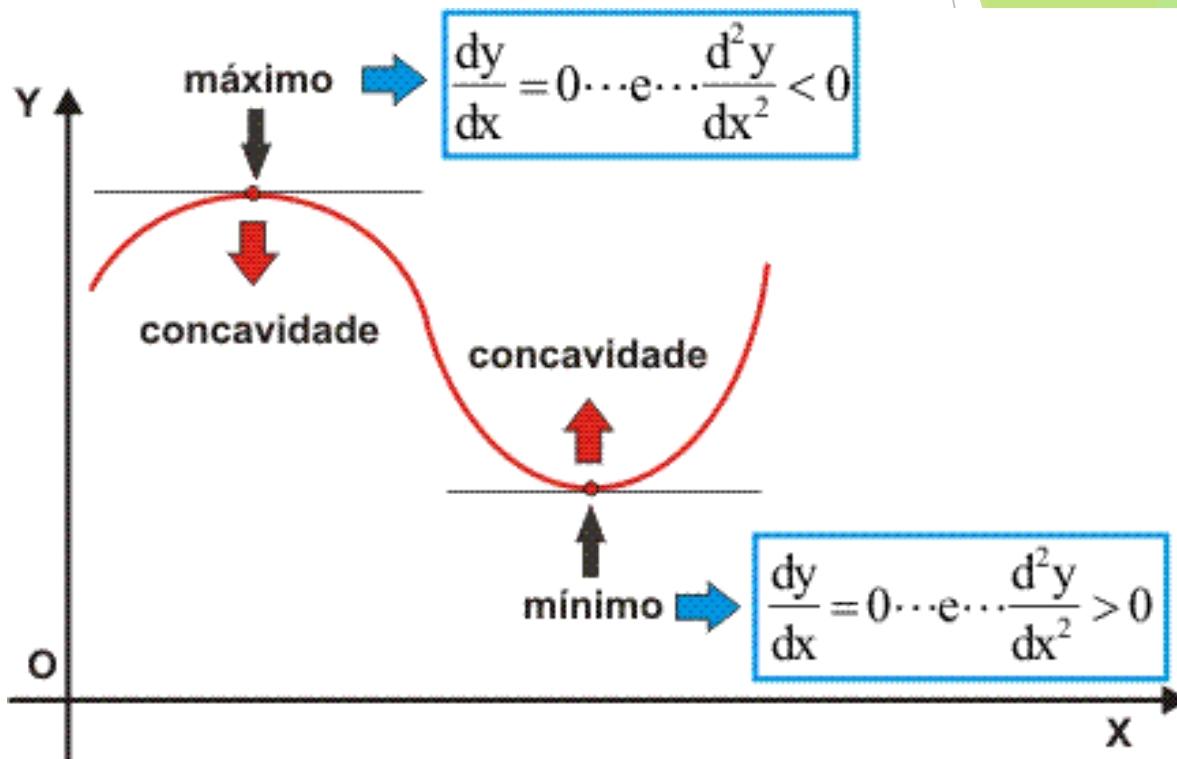
$$x_2 = 2$$

Entretanto, ainda é impossível dizer só com a derivada de primeira ordem qual ponto é de máximo e qual é de mínimo

A Derivada de segunda ordem

A derivada de segunda ordem nos permite identificar os pontos de máximo ou de mínimo na derivada de primeira ordem, uma vez que esta expressa a concavidade da função primitiva.

Assim:



$f''(x) > 0$, a concavidade é voltada para cima (ponto de mínimo).

$f''(x) < 0$, a concavidade é voltada para baixo (ponto de máximo).

$f''(x) = 0$, ponto de mudança de concavidade (ponto de inflexão).

Propriedade da derivada primeira

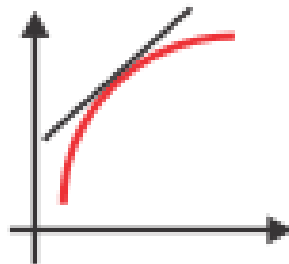
Derivada primeira

Função

Gráfico

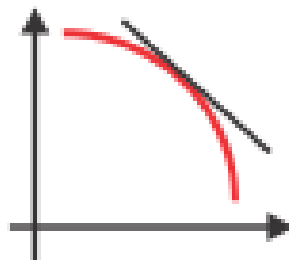
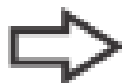
$$f'(x) > 0$$

crescente



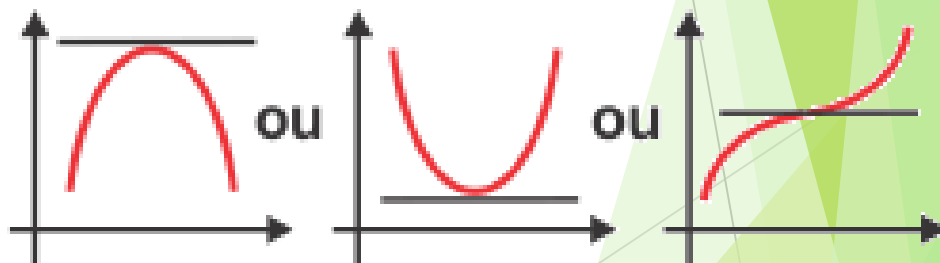
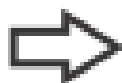
$$f'(x) < 0$$

decrescente



$$f'(x) = 0$$

**máximo
mínimo
inflexão**



Propriedade da derivada segunda

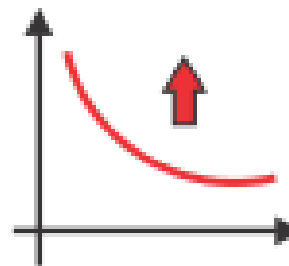
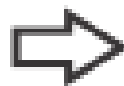
Derivada
segunda

Função

Gráfico

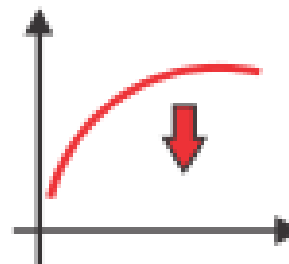
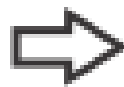
$$f''(x) > 0$$

concauidade
para cima



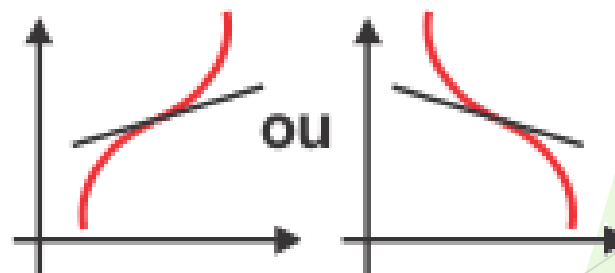
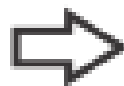
$$f''(x) < 0$$

concauidade
para baixo

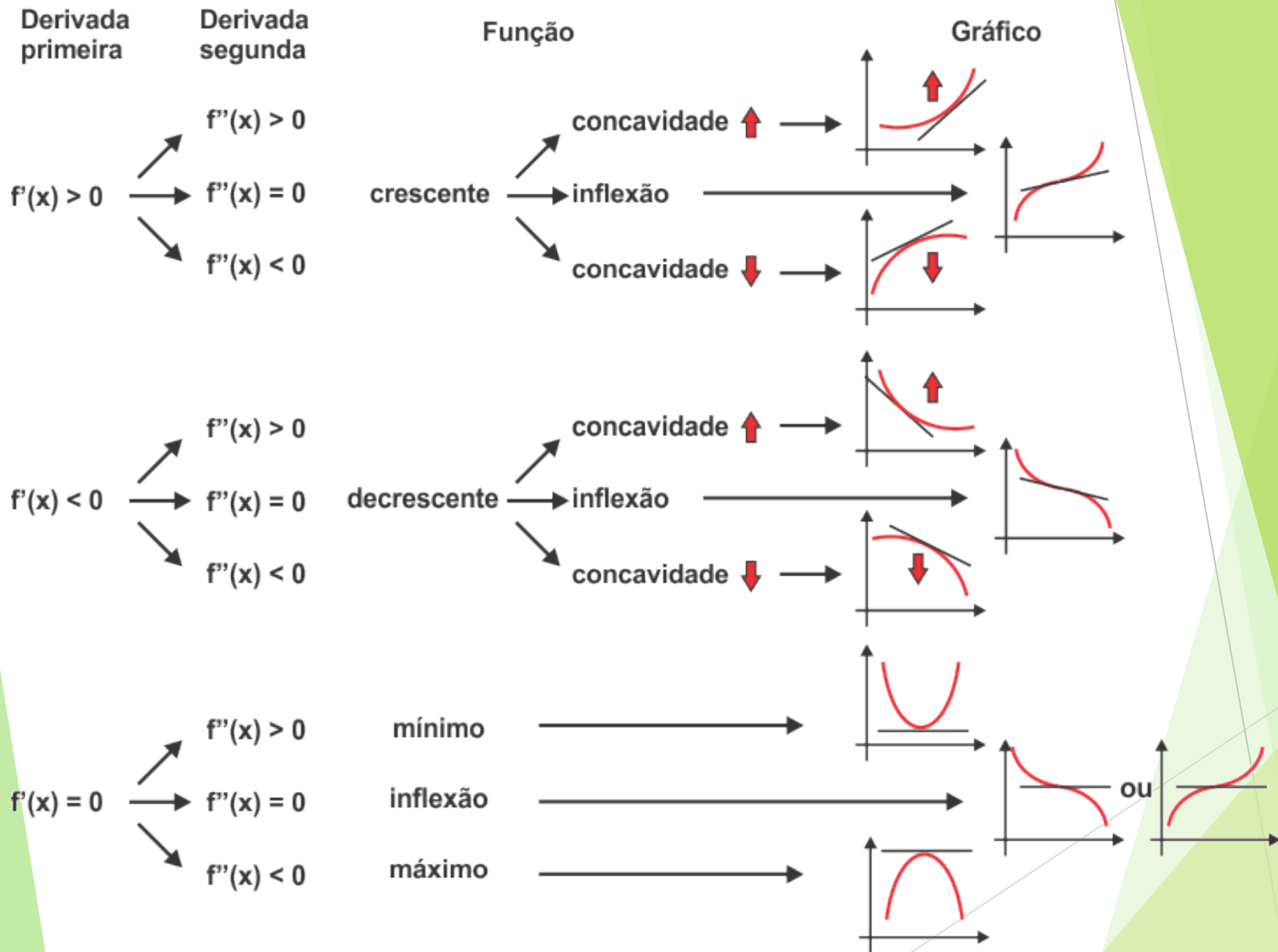


$$f''(x) = 0$$

mudança de
concauidade
inflexão



Quadro resumo das propriedades das derivadas

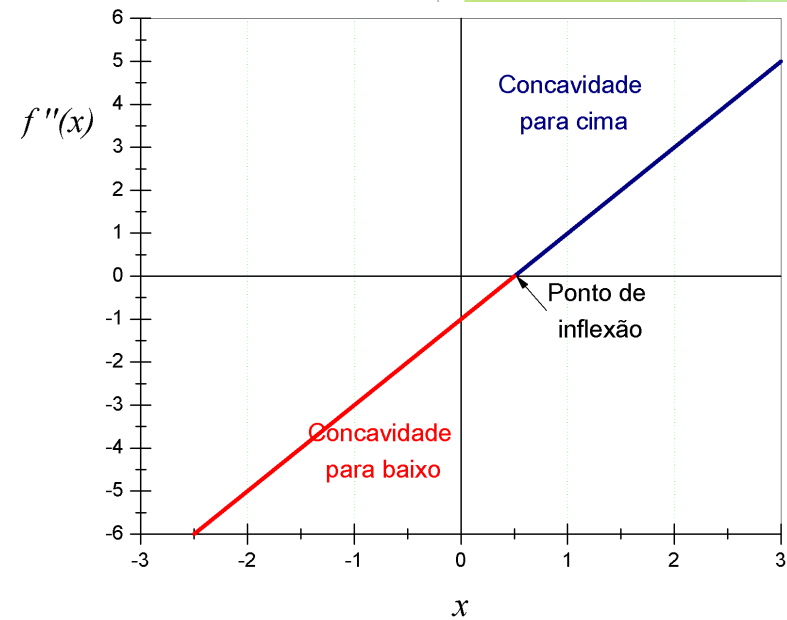
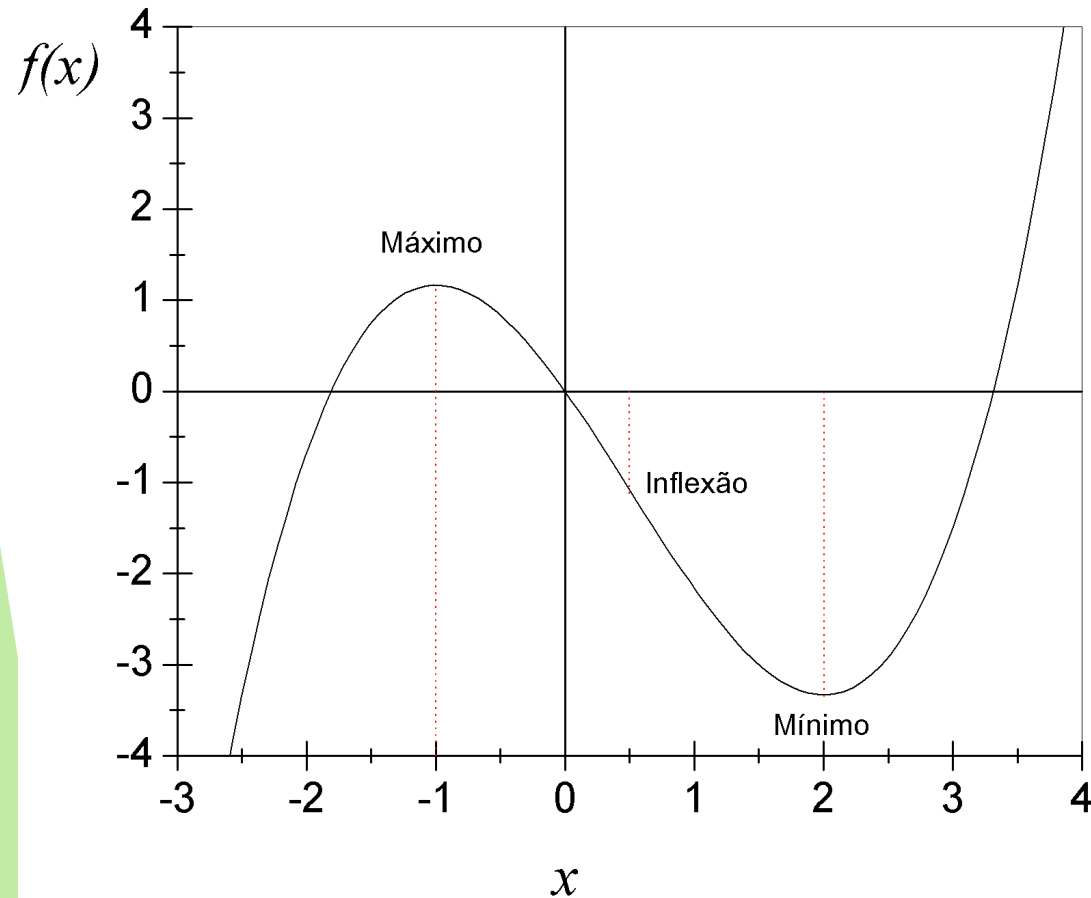


FONTE: <https://www.alfaconnection.pro.br/matematica/limites-derivadas-e-integrais/derivadas/interpretacao-grafica-das-derivadas-primeira-e-segunda/>

Retomando o exemplo:

Vamos discernir os pontos de máximo e mínimo da função $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$

- Calculado $f''(x)$, obtemos $f''(x) = 2x - 1$



Sendo assim, o ponto $x = -1$ é um ponto de máximo por estar em uma região de concavidade para cima, ao passo que o ponto $x = 2$ é um ponto de mínimo por estar em uma região de concavidade para baixo.

Integral

Integrais indefinidas

Da mesma forma que a adição e a subtração, a multiplicação e a divisão, a operação inversa da derivação é a **antiderivação** ou **integração indefinida**.

Dada uma função $g(x)$, de modo que $g'(x) = f(x)$, então podemos dizer que $g(x)$ é a integral indefinida ou antiderivada de $f(x)$ (Pode-se dizer também que a função $g(x)$ é a função primitiva de $f(x)$), logo

$$g(x) = \int f(x)dx$$

$$g(x) = \int f(x)dx \quad \text{se, e somente se} \quad f(x) = \frac{d}{dx}g(x)$$

Assim como foi feito para a operação de derivação, a integração também possui as suas regras tabeladas.

Regras de Integração

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)] dx = f(x) + k$$

$$\int (u + v) dx = \int u dx + \int v dx$$

$$\int au dx = a \int u dx, \quad \text{onde } a \text{ uma constante}$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + k, \quad \text{se } n \neq -1$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln u + k, \quad \text{se } u > 0$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + k$$

$$\int e^u du = e^u + k$$

$$\int \text{sen } u du = -\text{cos } u + k$$

$$\int \cos u du = \text{sen } u + k$$

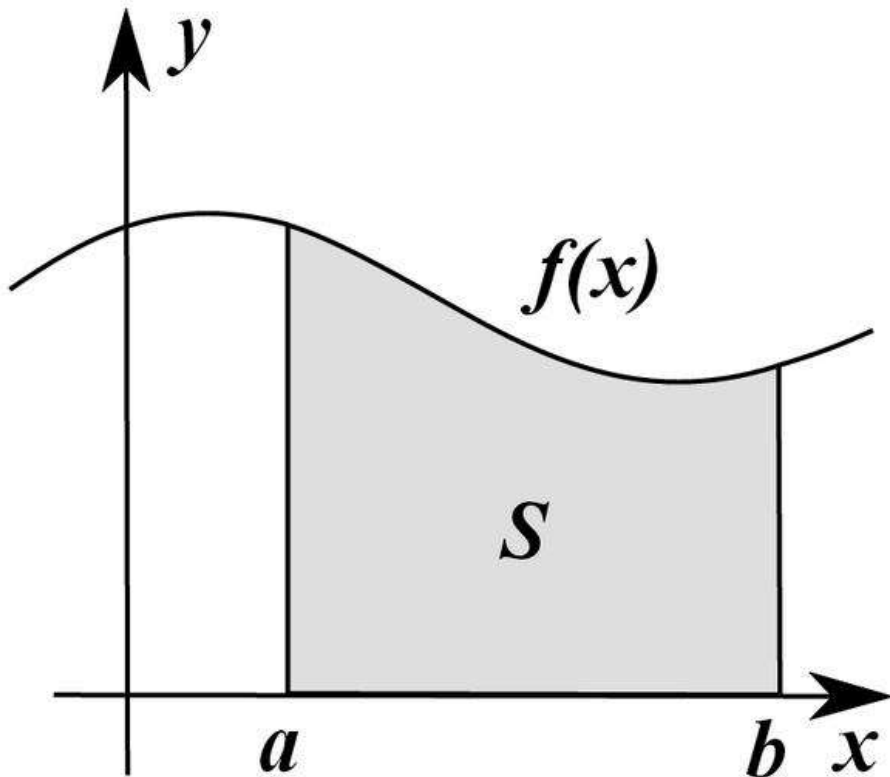
$$\int \text{tg } u du = \ln \text{sec } u + k$$

$$\int du = \int 1 du = u + k$$

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du + k$$

Integrais indefinidas

A integral indefinida é apenas uma operação inversa da derivada (antiderivada), entretanto a integral definida pode ser entendida como a área abaixo da função $f(x)$, mais especificamente, a área delimitada entre o eixo x , a função $f(x)$ e as retas que passam pelos pontos $x = a$ e $x = b$.



$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$



JÁ
ACABOU,
JÉSSICA?